Задачи к зачету по курсу
"Теория случайных процессов"

1. Для случайного процесса с независимыми и однородными по времени приращениями вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию.

2. Случайный процесс $\xi(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$, где ω- неслучайная константа, A φ независимы, $\mathbf{M}(A) = m, \mathbf{D}(A) = \sigma^2, \varphi$-равномерно распределена на опрезке $[0, \pi]$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию для $\xi(t)$. Доказать, что это стационарный в широком смысле случайный процесс.

3. Пусть $W(t)$-стандартный винеровский процесс. Доказать, что он непрерывен в среднем квадратическом, но не является дифференцируемым в среднем квадратическом.

4. $\xi(t)$-пуассоновский процесс, $\eta(t) = \int_0^t \xi(s)ds$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию для $\eta(t)$.

5. Пусть $W(t)$-стандартный винеровский процесс. $\xi_1 = \int_0^\pi \cos(t)dW(t)$,
$\xi_2 = \int_0^\pi \sin(t)dW(t)$. Найти: $M(\xi_1), M(\xi_2), D(\xi_1), D(\xi_2), Cov(\xi_1, \xi_2)$.

6. Корреляционная функция стационарного процесса равна $R(\tau) = \exp(-\tau^2)$. Найти спектральную плотность $f(\lambda)$. Обратно, дана спектральная плотность $f(\lambda) = \exp(-|\lambda|)$, найти $K(\tau)$.

7. Пусть $W(t)$-стандартный винеровский процесс, $h(\tau) = \exp(-\tau)$,
$\tau > 0, \xi(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s)W(s)ds$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию для такого процесса. То же самое для процесса $\eta(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s)dW(s)$.

8. Случайный процесс $\xi(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi(t) = -\xi(t)dt + d\eta(t),\ t \geq 0.$$

Найти общий вид решения этого уравнения.

9. Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ имеет спектральную плотность $f(\lambda) = \exp(-|\lambda|)$. Доказать, что этот процесс является дифференцируемым в среднем квадратическом и найти корреляционную функцию для производной.

10. Случайный процесс $\xi(t)$ имеет среднее 0 и корреляционную функцию $\cos(t-s)$. Найти kорреляционную функцию для процесса $\eta(t) = \xi(t) + \xi'(t)$.

11. $W(t), t \geq 0$ – стандартный винеровский процесс. Образуем случайную последовательность по правилу: $\xi_n = W(n) - W(n-1), n \geq 1$. Доказать, что это стационарная в широком смысле случайная последовательность.

12. Стационарная последовательность $\xi(n)$ имеет спектральную плотность $f(\lambda) = 10+6\cos\lambda = |3+e^{-i\lambda}|^2$. По наблюдениям $\xi(n),\ n \leq 0$, найти оптимальный линейный прогноз на один шаг вперед.

13. Найти наилучшую линейную оценку для с.в. η в пространстве $L = \{a+b\xi\}$, где $M(\xi) = M(\eta) = 0,\ D(\xi) = 1,\ cov(\xi, \eta) = 1$.

14. Для $t \in [0, \ln 2]$ наблюдается случайный процесс со стохастическим дифференциалом $d\xi(t) = (\alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{2t})dt + d\eta_0(t)$. Выписать вид оптимальных оценок для α_1 и α_2.

15. При движении по некоторому лабиринту Вы в первый раз равновероятно сворачиваете либо налево, либо направо. Далее на каждой развилке Вы с вероятностью 0.7 сворачиваете туда же, что и в предыдущий раз, а с вероятностью 0.3 в противоположную сторону. Какова вероятность того, что вы свернете налево:

а) на третьей развилке,

б) на 1000-ой развилке?

16. Пусть цепь Маркова с непрерывным временем имеет два состояния и следующую матрицу интенсивностей перехода

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Используя уравнения Колмогорова, найти вероятности перехода $P_{ij}(t), t \geq 0$.